

Problema 1A

Sistema:

$$\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}$$

a) Discusión según m

1. Determinante de la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (m-5)(m-2)$$

- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2, 5 \rightarrow \text{rango } A = 3 \Rightarrow$ sistema compatible **determinado** (una única solución).
- $\det A = 0$ cuando
 - $m = 5$

$$A_{m=5} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{m=5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Filas 1 y 3 son idénticas $\rightarrow \text{rg } A = 2$. La fila 3 del ampliado también se repite $\rightarrow \text{rg}(A^*) = 2$. $\text{rg } A = \text{rg}(A^*) < 3 \Rightarrow$ **infinitas soluciones** (compatible indeterminado).

- $m = 2$

$$A_{m=2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_{m=2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Filas 1 y 2 idénticas $\Rightarrow \text{rg } A = 2$. En el ampliado la fila 2 cambia a $(2, 2, 1 \mid 2)$ $\Rightarrow$ aparece inconsistencia $\rightarrow \text{rg}(A^*) = 3 > \text{rg } A \Rightarrow$ **sin solución** (sistema incompatible).

Valor de m	nº de soluciones
$m \neq 2, 5$	Una
$m = 5$	Infinitas
$m = 2$	Ninguna

Solución general cuando $m \neq 2,5$

Aplicando Cramer (o resolviendo por reducción):

$$\boxed{x = 0, \quad y = \frac{m-1}{m-2}, \quad z = -\frac{m}{m-2}}$$

Solución para $m = 5$ (compatible indeterminado)

$$\begin{cases} 5x + 2y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -\frac{z}{7} - \frac{5}{21}, \\ y &= \frac{23}{21} - \frac{z}{7}, \\ z &= t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Resolución para $m = 3$

Sustituyendo $m = 3$ en la solución general (caso $m \neq 2,5$):

$$x = 0, \quad y = \frac{3-1}{3-2} = 2, \quad z = -\frac{3}{3-2} = -3.$$

$$\boxed{(x, y, z) = (0, 2, -3)}$$

(Comprobación rápida: $3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 = 1$, $2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 3 = 3 \checkmark$, $5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 - 3 = 1 \checkmark$)

Datos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema 1B

a) $M = A^t A - B B^t$

1. $A^t A$:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 + (-1)^2 & 1 \cdot 1 + (-1)(-1) \\ 1 \cdot 1 + (-1)(-1) & 1^2 + (-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. $B B^t$:

$$B B^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Resta:

$$M = A^t A - B B^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Curiosamente M coincide exactamente con la matriz N .

b) Hallar X tal que $XN = C$

Como N es cuadrada e invertible ($\det N = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2 \neq 0$),

$$X = C N^{-1}.$$

1. Inversa de N :

$$N^{-1} = \frac{1}{\det N} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Producto $C N^{-1}$:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Comprobación:

$$XN = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = C \quad \checkmark$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}},$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3A

Se dan las rectas

$$r: \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}, \quad s: x-1 = \frac{y-m}{m-1} = \frac{z-3}{3}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

a) Demostrar que r y s se cortan para **todo** m

r en forma paramétrica

$$r: (x, y, z) = (4t, 1 - 2t, 2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

s en forma paramétrica

$$s: (x, y, z) = (1 + k, m + k(m - 1), 3 + 3k), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Buscamos t, k que cumplan

$$4t = 1 + k, \quad 1 - 2t = m + k(m - 1), \quad 2t = 3 + 3k.$$

De la primera ecuación $k = 4t - 1$ y de la tercera $k = \frac{2t-3}{3}$.

$$4t - 1 = \frac{2t - 3}{3} \Rightarrow 12t - 3 = 2t - 3 \Rightarrow 10t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\Rightarrow k = 4 \cdot 0 - 1 = -1.$$

Comprobación en la segunda ecuación:

$$1 - 2(0) = 1, \quad m + (-1)(m - 1) = m - m + 1 = 1 \quad \checkmark$$

No interviene m ; por tanto **siempre** existen t, k y las rectas se cortan para cualquier m .

El punto de corte es con $t = 0$:

$$P = (4 \cdot 0, 1 - 2 \cdot 0, 2 \cdot 0) = (0, 1, 0).$$

b) Punto de intersección para $m = 6$

Como hemos visto, el punto no depende de m :

$$\boxed{P(0, 1, 0)}.$$

Problema 3B

Se trabaja con los vectores

$$\mathbf{u} = (3, -1, 5), \quad \mathbf{v} = (2, 6, 0).$$

a) Valor de a para que $\mathbf{t} = (1, a, 0)$ sea perpendicular a $\mathbf{u}$ (su producto escalar debe ser 0)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} = 3 \cdot 1 + (-1)a + 5 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 3 - a = 0 \Rightarrow \boxed{a = 3}.$$

b) Un vector $\mathbf{w}$ perpendicular a la vez a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

Basta un producto vectorial:

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (-30, 10, 20) = \boxed{(-3, 1, 2)} \quad (\text{se ha simplificado entre 10}).$$

c) Volumen del paralelepípedo generado por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$

$$\begin{aligned} V &= |\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -1 & 6 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 3(6 \cdot 2 - 1 \cdot 0) - 2(-1 \cdot 2 - 1 \cdot 5) + (-3)(-1 \cdot 0 - 6 \cdot 5) = 36 + 14 + 90 \\ &= 140. \end{aligned}$$

$$\boxed{V = 140}.$$

Problema 4A (accidentes del autobús)

Dato	Valor
Día nublado N dentro de los 10 días	$3/10 = 0,3$
Día seco S dentro de los 10 días	$7/10 = 0,7$
Prob. de accidente en nublado	$P(A N) = 0,09$
Prob. de accidente en seco	$P(A S) = 0,005$

Primero la probabilidad total de accidente esos 10 días:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A | N)P(N) + P(A | S)P(S) = 0,09(0,3) + 0,005(0,7) = 0,027 + 0,0035 \\ &= 0,0305. \end{aligned}$$

a) Prob. de que el accidente sea en día nublado

$$P(N | A) = \frac{P(A | N)P(N)}{P(A)} = \frac{0,09 \cdot 0,3}{0,0305} = \frac{0,027}{0,0305} \approx \boxed{0,885}.$$

b) Prob. de que sea en día seco

$$P(S | A) = 1 - P(N | A) \approx 1 - 0,885 = \boxed{0,115}.$$

Problema 4B (urna con 4 rojas y 2 azules, sin devolución)

Total de bolas: 6.

a) Probabilidad de que las dos bolas sean del **mismo** color

- Rojas seguidas: $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30}$
- Azules seguidas: $\frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{30}$

$$P(\text{mismo}) = \frac{12 + 2}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \quad (0,467).$$

b) Probabilidad de que sean de **distinto** color

$$P(\text{distinto}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15} \quad (0,533).$$

c) Si la **segunda** bola es azul, probabilidad de que la **primera** fuera roja

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap B_2) &= \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}, \\ P(B_2) &= \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{8 + 2}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}, \\ P(R_1 | B_2) &= \frac{P(R_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{15} \cdot 3 = \frac{4}{5} \quad (0,80). \end{aligned}$$

Problema 2

Se trabaja con la función

$$f(x) = 2x e^{-2x^2}.$$

Vamos a responder **paso a paso** los dos apartados como lo haríamos en 2.º de Bachillerato.

a) Dominio, crecimiento/decrecimiento, extremos y asíntotas

1. Dominio

- El factor $2x$ es un polinomio (se puede usar cualquier x).
- La exponencial e^{-2x^2} también está definida para todos los números reales.

$$D_f = \mathbb{R}$$

2. Derivada y puntos críticos

Usamos la **regla del producto** $(uv)' = u'v + uv'$.

- $u = 2x \Rightarrow u' = 2$
- $v = e^{-2x^2} \Rightarrow v' = e^{-2x^2} \cdot (-4x)$ (regla de la cadena)

$$\begin{aligned}f'(x) &= u'v + uv' \\&= 2e^{-2x^2} + 2x(-4xe^{-2x^2}) \\&= 2e^{-2x^2}(1 - 4x^2).\end{aligned}$$

El factor $2e^{-2x^2}$ **nunca es cero**; por tanto, $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$.

Estos dos valores son los **puntos críticos**.

3. Tabla de signos de $f'(x)$

Intervalo	Elegimos x	$1 - 4x^2$	$f'(x)$	Comportamiento
$(-\infty, -1/2)$	$x = -1$	$1 - 4 > 0 - 4 = -3 < 0$	$-$	Decrece
$(-1/2, 1/2)$	$x = 0$	$1 - 0 = 1 > 0$	$+$	Crece
$(1/2, \infty)$	$x = 1$	$1 - 4 = -3 < 0$	$-$	Decrece

4. Máximos y mínimos relativos

- En $x = -\frac{1}{2}$ la derivada pasa de $-$ a $+$ $\Rightarrow$ **mínimo relativo**.

$$f(-1/2) = 2(-1/2)e^{-2(\frac{1}{4})} = -e^{-1/2} \approx -0,607.$$

- En $x = \frac{1}{2}$ la derivada pasa de $+$ a $-$ $\Rightarrow$ **máximo relativo**.

$$f(1/2) = 2(1/2)e^{-1/2} = e^{-1/2} \approx 0,607.$$

5. Asíntotas

- **Verticales:** no hay, porque el dominio es todo $\mathbb{R}$.
- **Horizontales:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2xe^{-2x^2} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{-2x^2} = 0.$$

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal por ambos extremos.

(Si quisiéramos, podríamos comentar que la función es **impar** porque $f(-x) = -f(x)$, pero no nos lo piden).

b) Área bajo la curva en el intervalo $[0,2]$

Nos piden el área comprendida entre la gráfica y el eje x ; como $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, basta integrar:

$$A = \int_0^2 2x e^{-2x^2} dx.$$

Paso 1. Sustitución

Usamos $u = -2x^2$.

- $du = -4x dx \Rightarrow -1/2 du = x dx$.
- Cuando $x = 0 \Rightarrow u = 0$.
- Cuando $x = 2 \Rightarrow u = -8$.

Paso 2. Cambio de variable

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 2x e^{-2x^2} dx = -1/2 \int_0^2 -4e^{-2x^2} dx = \\ &= \frac{-1}{2} [e^{-2x^2}]_0^2 = \frac{-1}{2} (e^{-8} - e^0) = \frac{1 - e^{-8}}{2} u^2. \end{aligned}$$

